

## Γραμμική Άλγεβρα 1 - Τεστ Νο 2

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 Λεπτά

**Στοιχειοθεσία:** Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

### Θέμα 1 (25 Μόρια)

Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

- (i) (5 Μόρια) Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή  $\Gamma(A)$  του πίνακα  $A$ .
- (ii) (5 Μόρια) Να βρεθεί αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε  $PA = \Gamma(A)$ .
- (iii) (5 Μόρια) Να βρεθεί η κανονική μορφή  $K(A)$  του πίνακα  $A$ .
- (iv) (5 Μόρια) Να βρεθεί αντιστρέψιμος  $5 \times 5$  πίνακας  $Q$  τέτοιος ώστε  $PAQ = K(A)$ .
- (v) (5 Μόρια) Να βρεθεί η βαθμίδα του  $A$ .

### Θέμα 2 (25 Μόρια)

- (i) (10 Μόρια) Έστω τετραγωνικός πίνακας  $A$ . Αν η τελευταία γραμμή του ισχυρά γ-κλιμακωτού πίνακα  $\Gamma(A)$  είναι μηδενική, ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  δεν είναι αντιστρέψιμος, ενώ αν η τελευταία γραμμή του πίνακα  $\Gamma(A)$  είναι μη μηδενική, ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος. Να δοθεί ο τύπος που περιγράφει τον αντίστροφο του πίνακα  $A$ .
- (ii) (15 Μόρια) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Μέσω του αλγορίθμου Gauss να βρεθεί (αν υπάρχει) ο αντίστροφος  $A^{-1}$  του  $A$  και να περιγραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

### Θέμα 3 (50 Μόρια)

Στο σύνολο  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  ορίζουμε τη σχέση  $\sim$  κατά την οποία για κάθε  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ :

$$A \sim B \iff \exists \text{ αντιστρέψιμοι πίνακες } P \in M_m(\mathbb{K}) \text{ και } Q \in M_n(\mathbb{K}) \text{ ώστε } PAQ = B.$$

Ναδειχθεί ότι:

- (i) (10 Μόρια) η σχέση  $\sim$  είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ .
- (ii) (5 Μόρια) ένας πίνακας  $A$  είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν.ν  $A = O$ .
- (iii) (5 Μόρια) ένας  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος αν.ν είναι ισοδύναμος με τον  $I_n$ .
- (iv) (5 Μόρια) δύο τυχόντες αντιστρέψιμοι πίνακες είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι.
- (v) (5 Μόρια) ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι ισοδύναμος με τον  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (vi) (10 Μόρια) αν  $r(A) = r(B)$ , τότε  $A \sim B$ .
- (vii) (10 Μόρια) αν  $A \sim_\gamma B$ , τότε  $A \sim B$ . Ισχύει το αντίστροφο;

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**